Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 11

Esercizio 1 Calcolare

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int x^2\sin(x)\,dx \qquad \int \arctan x\,dx \qquad \int e^x\sin(x)\,dx$$
$$\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx, \qquad \int_1^2 x\log^2(x)\,dx \qquad \int_1^2 \frac{\log(x)}{x^3}\,dx \qquad .$$

Esercizio 2 Si dica se i seguenti limiti esistono e, in caso affermativo, si calcolino

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\, e^t\,dt}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\,|t|\,dt}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x [t]\,(1-\cos t))\,dt}{x^2}$$

Esercizio 3 Si abbozzino i grafici delle seguenti funzioni (sono richiesti. dominio, monotonia e limitatezza. Per la prima funzione é richiesto anche il calcolo dei limiti agli estremi dell'insieme di definizione. Per la terza il segno di eventuali estremi assoluti).

$$\int_0^x t\log(1+t)\,dt \qquad \int_1^x \frac{e^t}{|t|+1}\,dt \qquad \int_1^{x^2} \frac{e^t}{|t|+1}\,dt$$

Esercizio 4 Si trovi una funzione continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^x (\pi+\arctan x)f(t)\,dt = 1-\cos x\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Esercizio 5 Si trovino tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che

$$(e^x+1)f'(x)+e^xf(x) = 1+\cos x\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 6 Sia $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ continua. Fissato $c\in[-a,a]$, sia

$$F_c(x) = \int_c^x f(s)\,ds \qquad x\in[-a,a]$$

Dimostrare che se $f(x)$ é pari allora $F_0(x)$ é dispari e che se $f(x)$ é dispari allora $F_c(x)$ é pari per ogni $c\in\mathbb{R}$. (Suggerimento: si osservi che se $f(x)$ é dispari $\int_{-c}^c f(x)\,dx = 0$.)

Esercizio 7 Determinare i domini di definizione delle funzioni

$$f(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \qquad\qquad g(x) = \int_1^x \frac{\log(1+t)}{t}\,dt.$$

Esercizio 8 Determinare la primitiva che vale 0 per $x=0$ delle seguenti funzioni

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x},\ \ \sin^5 x,\ \ x\,e^{x^2},\ \ \arcsin x,\ \ x^2\arctan x,\ \ \sin(ax)sin(bx)\ a,\ b\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 9 Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi(x) \text{ continua in } [a,b].$$

Si provi che $f(x)$ è nulla.

Esercizio 10 Sia f integrabile in $[a, b]$. Dimostrare che

$$\left(\fint_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leq \fint_a^b f^2(x)\,dx.$$

dove $\fint_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$ (Suggerimento: si riscriva $\fint_a^b \left(f(x) - \fint_a^b f(x)\,dx\right)^2 dx$ utilizzando la proprietá di linearitá.)

Esercizio 11 Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 1, positiva e non identicamente nulla. Allora

1. Esiste $t > 0$ tale che $\int_t^{t^2} f(x)\,dx = 100$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\int_0^1 f(3x)\,dx = 3\int_0^1 f(x)\,dx$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 12 Sia $f \in C^0([0, 1])$ con $f \geq 0$ e sia $M := \max f$.

1. Se $M > 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = +\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $M = 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = 1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se $M < 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\displaystyle\int_0^1 f(|\sin x|)\,dx \leq M$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 13 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (secondo Riemann), e sia $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Allora:

1. Se x_0 è un punto di continuità per f, allora è un punto di derivabilità per F. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se x_0 è un punto di derivabilità per F, allora è un punto di continuità per f. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. F è integrabile (secondo Riemann). $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Se f è derivabile con $|f'| \leq 2$ e $f(0) = 0$, allora $F(1) \geq -1$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$